

Abschätzung von  $1/\sqrt{n}$

a) Beweisen Sie für jede natürliche Zahl  $n$

$$2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}).$$

b) Bestimmen Sie den größten ganzen Anteil  $\lfloor x \rfloor$  der Zahl

$$x = \sum_{k=1}^{1000000} \frac{1}{\sqrt{k}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{1000000}}.$$

Hinweis: Für eine reelle Zahl  $x$  ist der größte ganze Anteil die eindeutig bestimmte ganze Zahl  $\lfloor x \rfloor =: m$  mit  $m \leq x < m+1$ . Benutzen Sie die Ungleichung aus a).