

Abschätzung von $1/\sqrt{n}$

a) Beweisen Sie für jede natürliche Zahl n

$$2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}).$$

b) Bestimmen Sie den größten ganzen Anteil $\lfloor x \rfloor$ der Zahl

$$x = \sum_{k=1}^{1000000} \frac{1}{\sqrt{k}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{1000000}}.$$

Hinweis: Für eine reelle Zahl x ist der größte ganze Anteil die eindeutig bestimmte ganze Zahl $\lfloor x \rfloor =: m$ mit $m \leq x < m + 1$. Benutzen Sie die Ungleichung aus a).